

EULERO, UN GENIO MATEMATICO A BORDO



1778, LUNGHE NOTTI A SAN PIETROBURGO



Il processo creativo

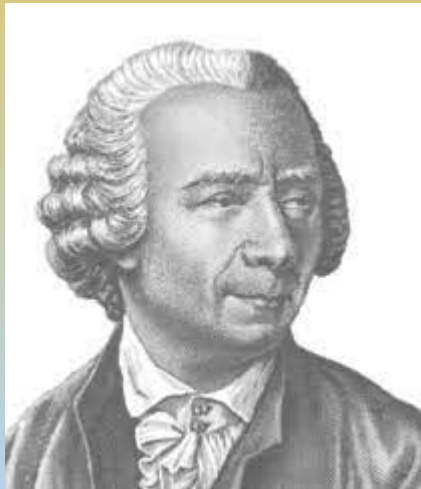
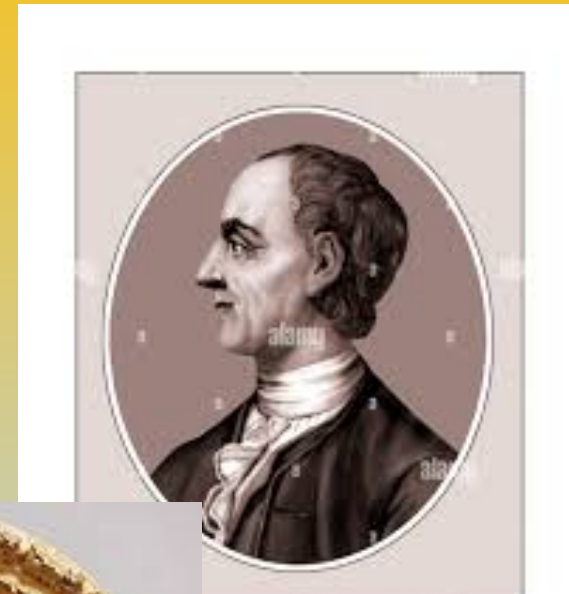
« In fisica e in matematica è impressionante la sproporzione tra lo sforzo per capire una cosa nuova per la prima volta e la semplicità e naturalezza del risultato una volta che i vari passaggi sono stati compiuti. Nel prodotto finito, nelle scienze come in poesia , non c'è traccia della fatica del processo creativo e dei dubbi e delle esitazioni che lo accompagnano»

Giorgio Parisi , Premio Nobel per la fisica , 2021

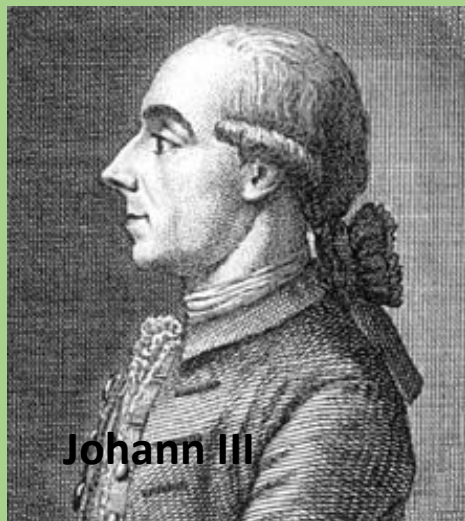
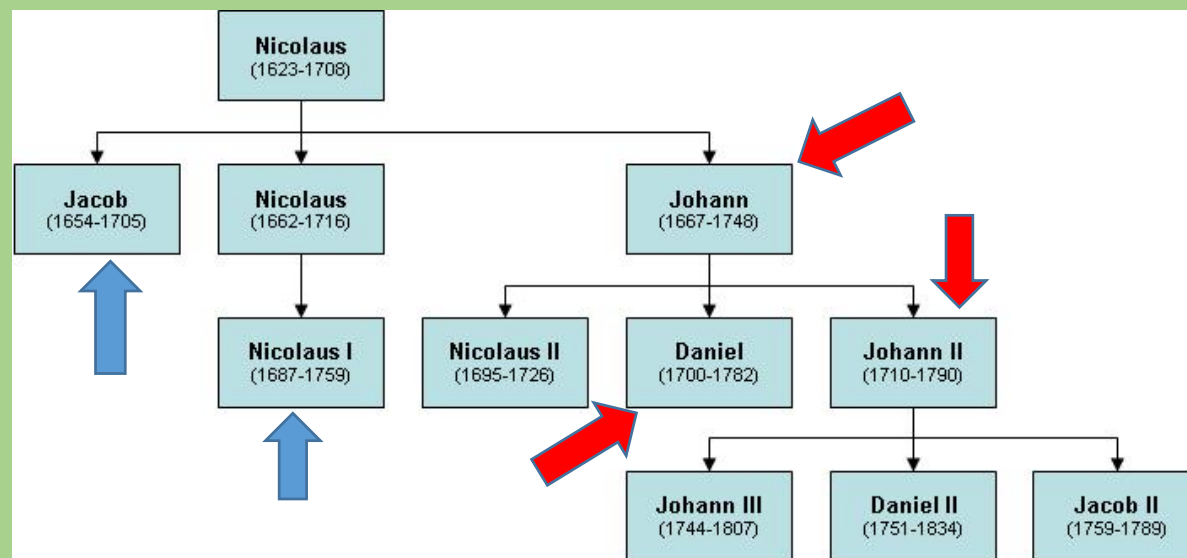
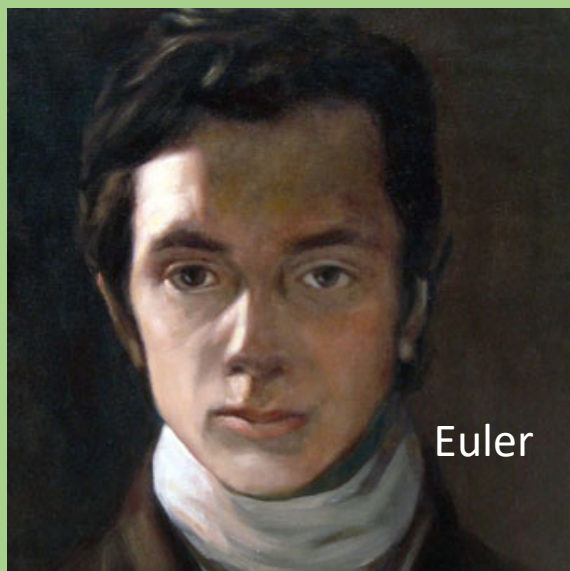
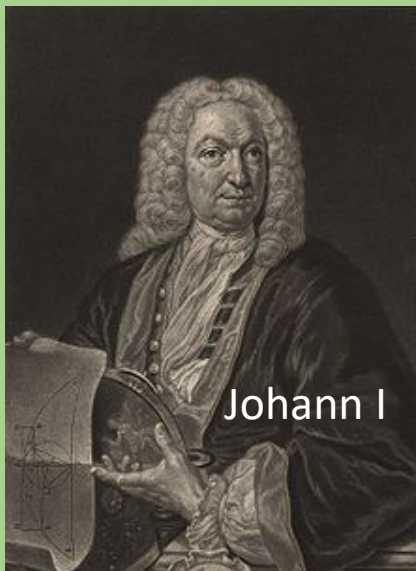
novembre 1778, a San Pietroburgo



Un' ordinaria vita straordinaria

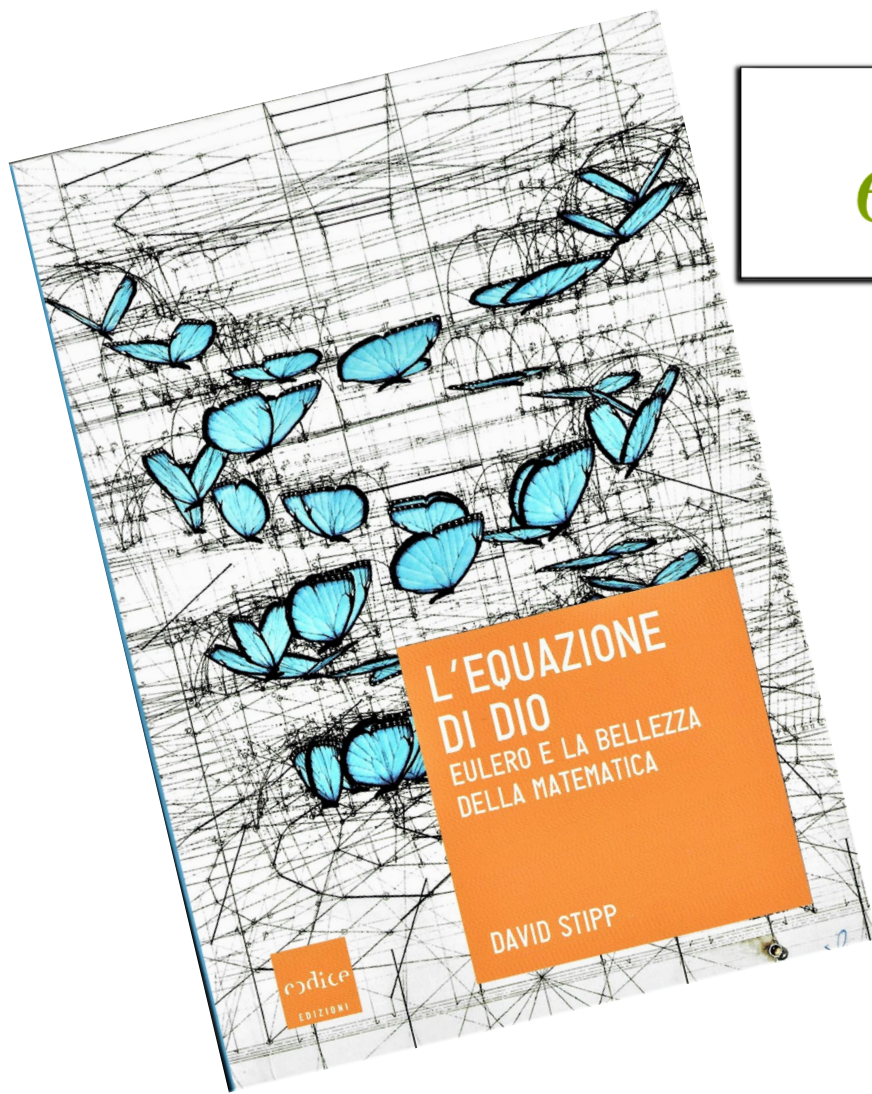


Gioventù a Basilea

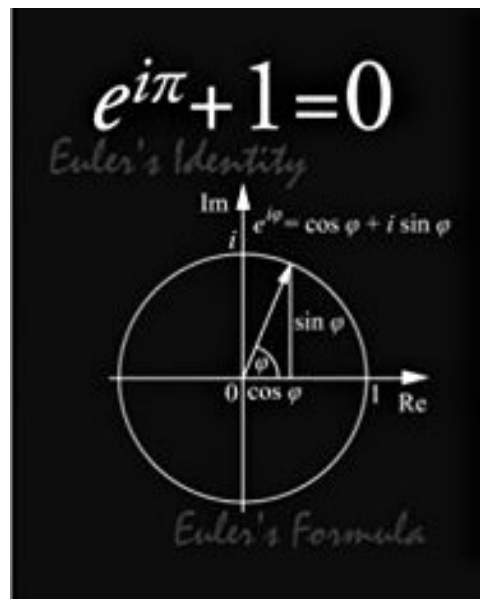


L'EQUAZIONE DI DIO

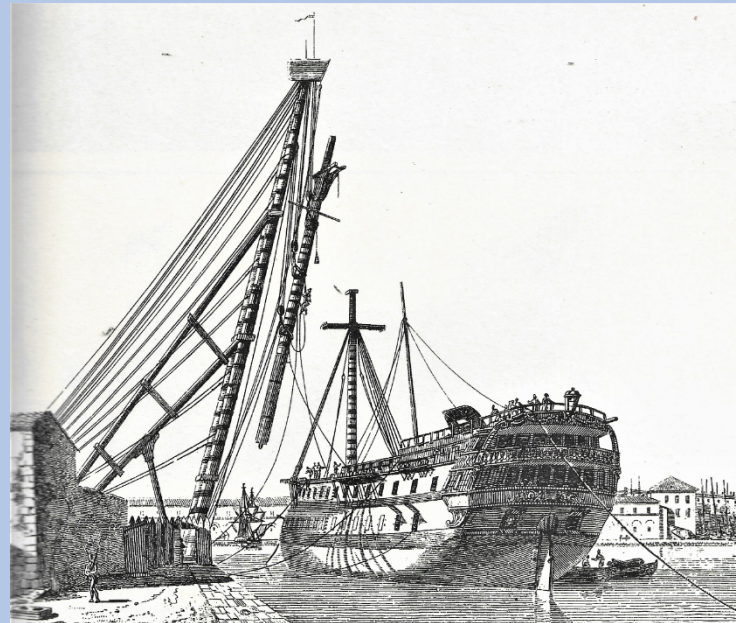
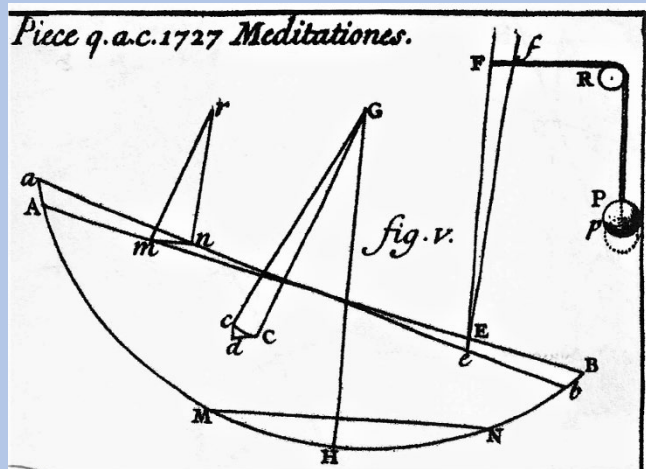
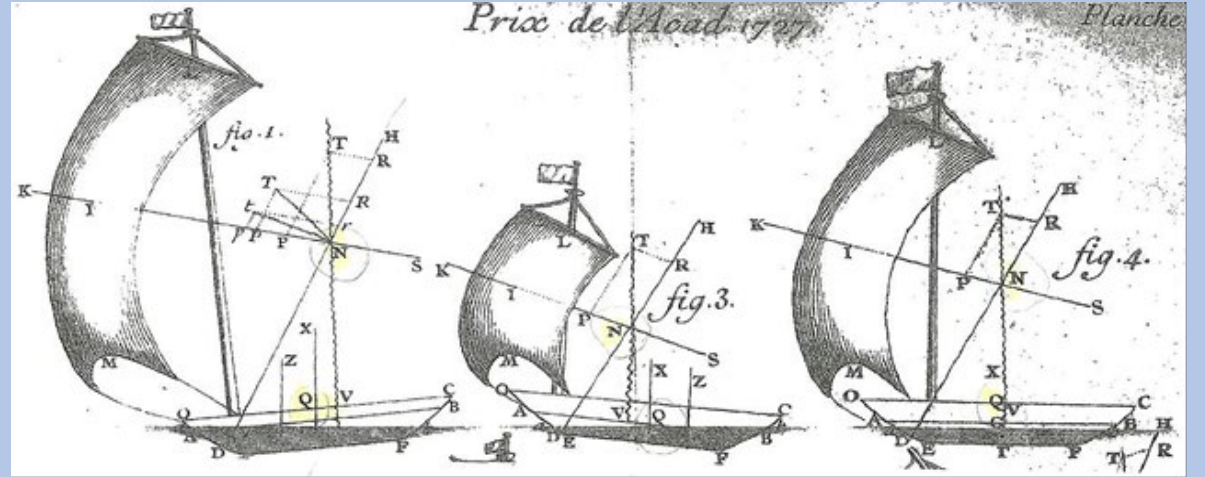
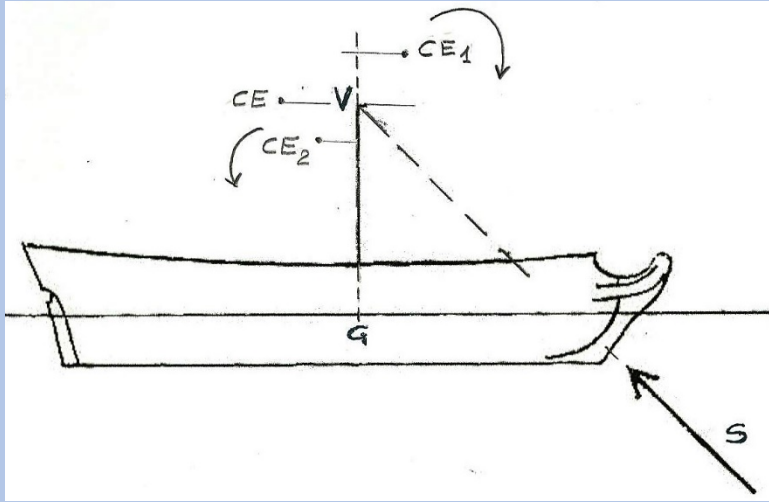
Eulero e la bellezza della matematica (D. Stipp)



$$e^{i\pi} + 1 = 0$$



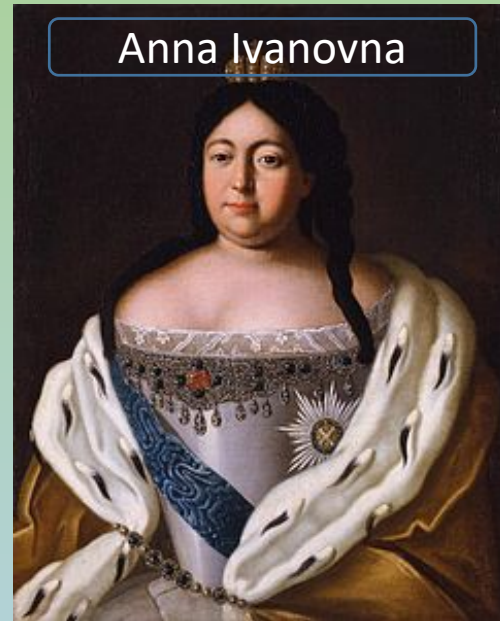
miglior posizionamento delle alberature (1727)



Tra Russia e Prussia 1



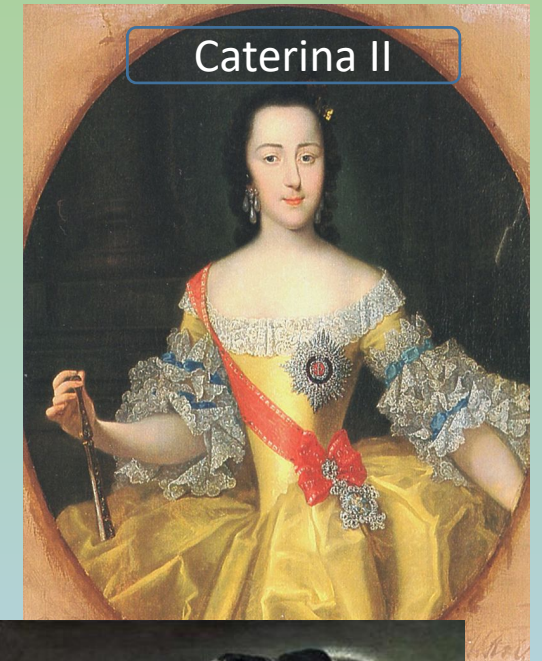
Caterina I



Anna Ivanovna



Elisabetta



Caterina II



Pietro II



Grigorij Orlov



Pietro III



Federico II

Tra Russia e Prussia 2



Un'Europa permanentemente in guerra- 1

Guerra di successione austriaca (1740-'48)



Guerra di successione polacca (1733-1735)

battaglia navale C° Passero (1718)



battaglia della baia di Vigo



conquista prussiana della Slesia



Guerra di successione spagnola (1702-1713)

Un'Europa permanentemente in guerra -2

Battaglia di Rossbach



Battaglia di Kolin



Guerra dei Sette Anni (1756-'63)

- Gran Bretagna e America britannica
- Portogallo
- Hannover
- Prussia
- Assia-Kassel
- Brunswick- W.
- Schaumburg-L.
- Naz. Irochese

Contro

- ❖ Francia e nuova Francia
- ❖ Austria
- ❖ Spagna
- ❖ Russia
- ❖ Sacro Romano Impero
- ❖ Sassonia
- ❖ Svezia
- ❖ Naz. Urone



Battaglia di Plassey,



Vittoria di Montcalm



battaglia di Zorndorf



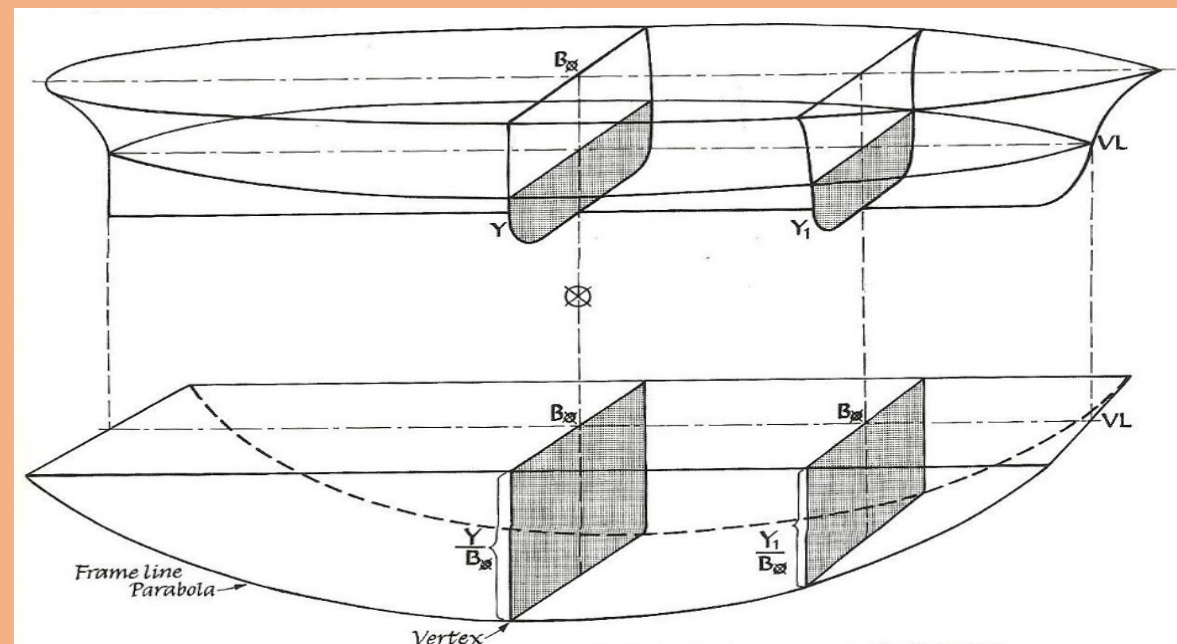
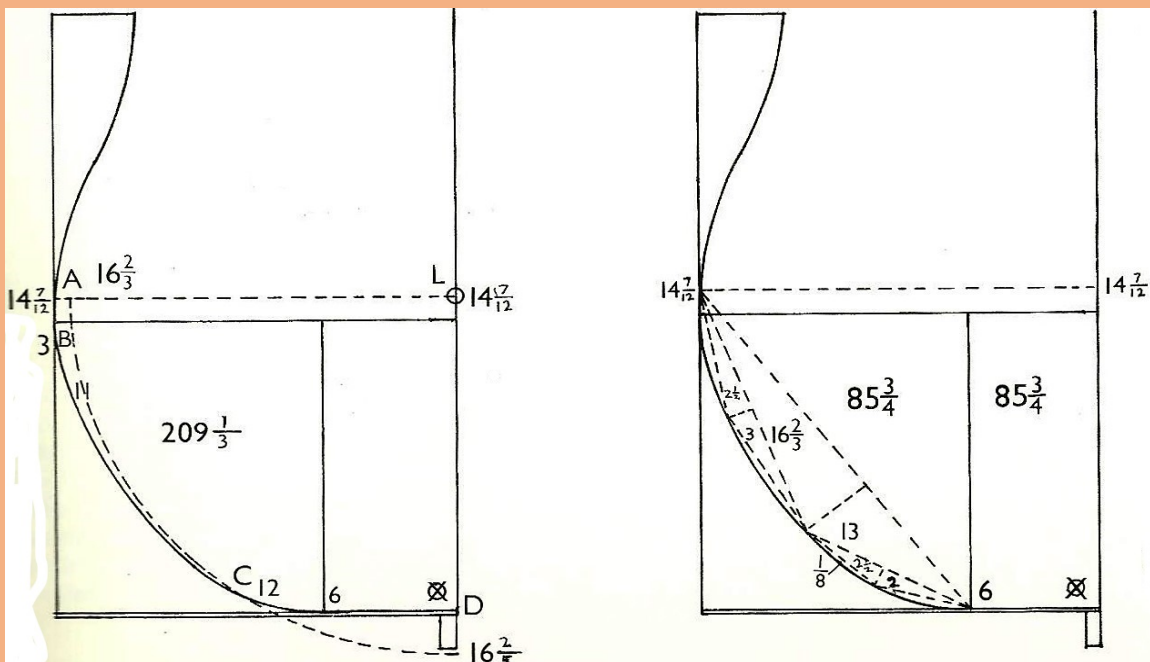
Battaglia di Kunersdorf

L'agevole serie condivisa con Mac Laurin (1735)

Le *Serie* nascono dall'idea di ottenere un numero finito dalla somma di infiniti numeri che prima sembrava assurdo .

La somma delle somme parziali della serie si indica con $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$; un'operazione successiva di *passaggio al limite* della successione può dare un valore finito o di ottima approssimazione .

In campo navale le curve di maggior interesse sono le **coniche** (ellissi, parabole, iperboli)



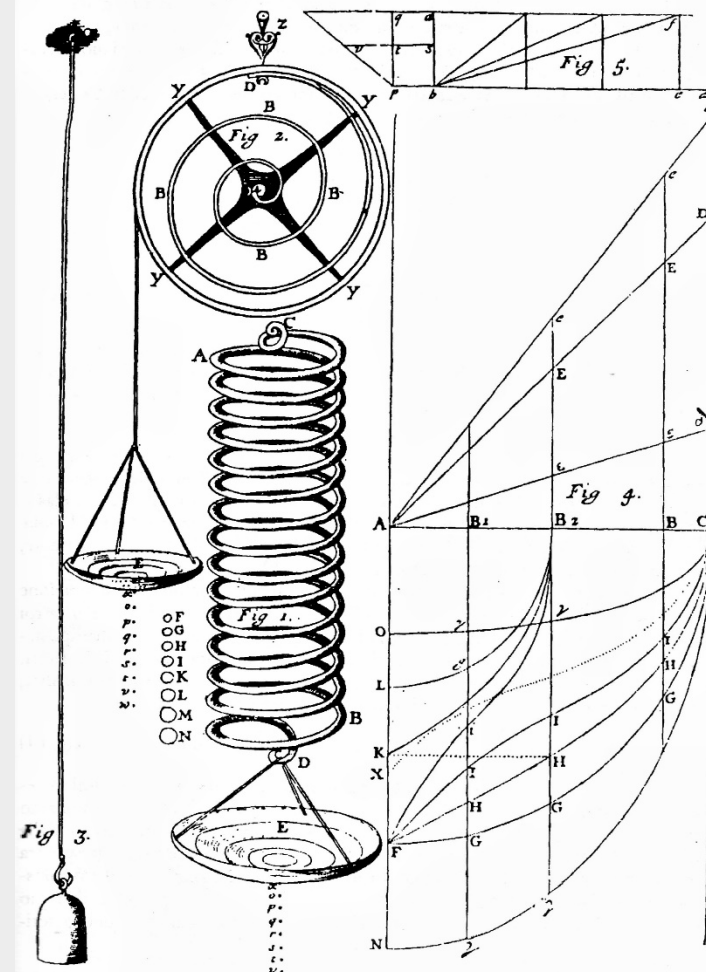
Un'applicazione elementare della serie Eulero-McLaurin

Legge di Hooke (1703): «*ut tensio sic vis*» , cioè proporzionalità dello spostamento o deformazione con la forza applicata che vale per una molla come per una trave :

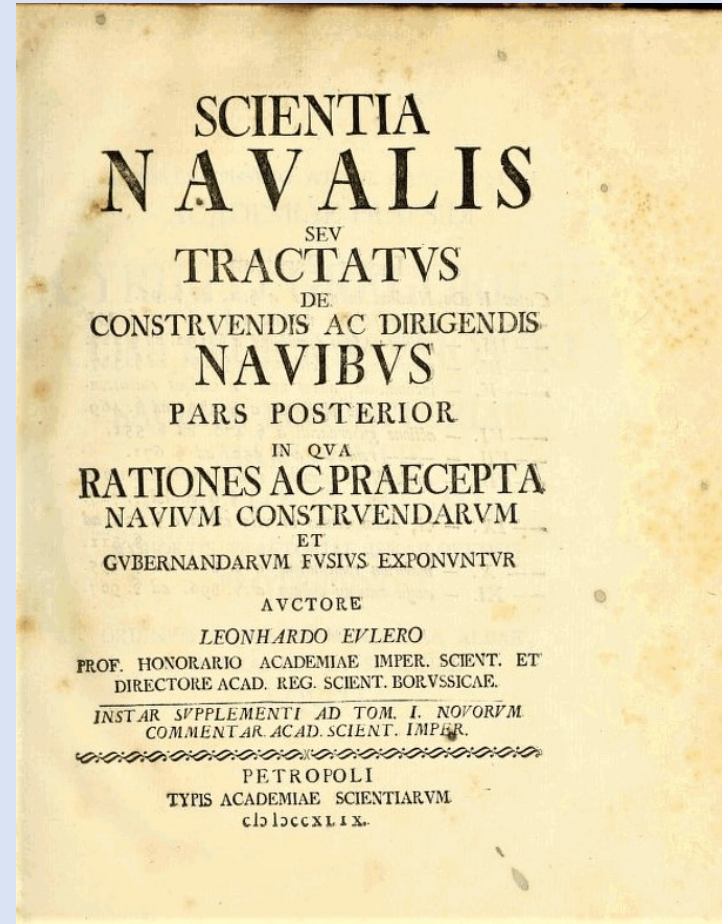
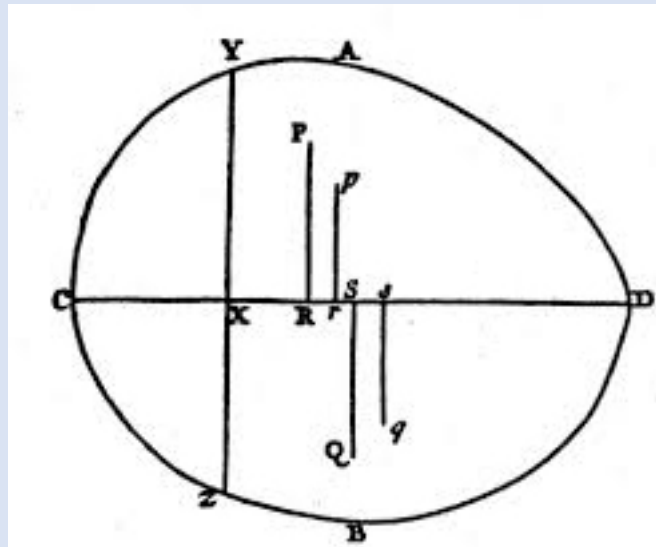
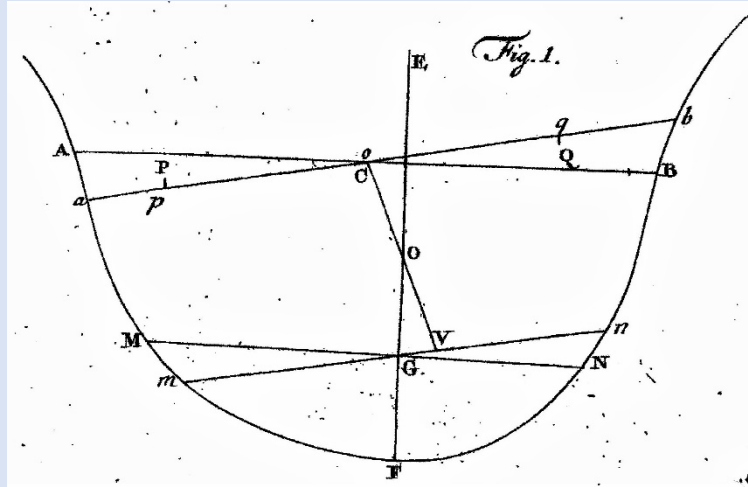
$$F = K \cdot u$$

usando la detta *serie* e fermandosi al primo termine si ottiene :

$$F = f(u) \quad F = df/du \cdot u , \text{ dove } K = df/du$$

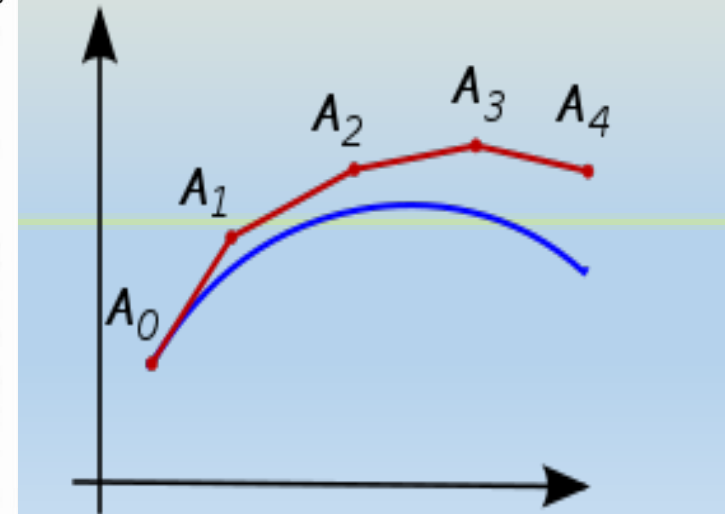
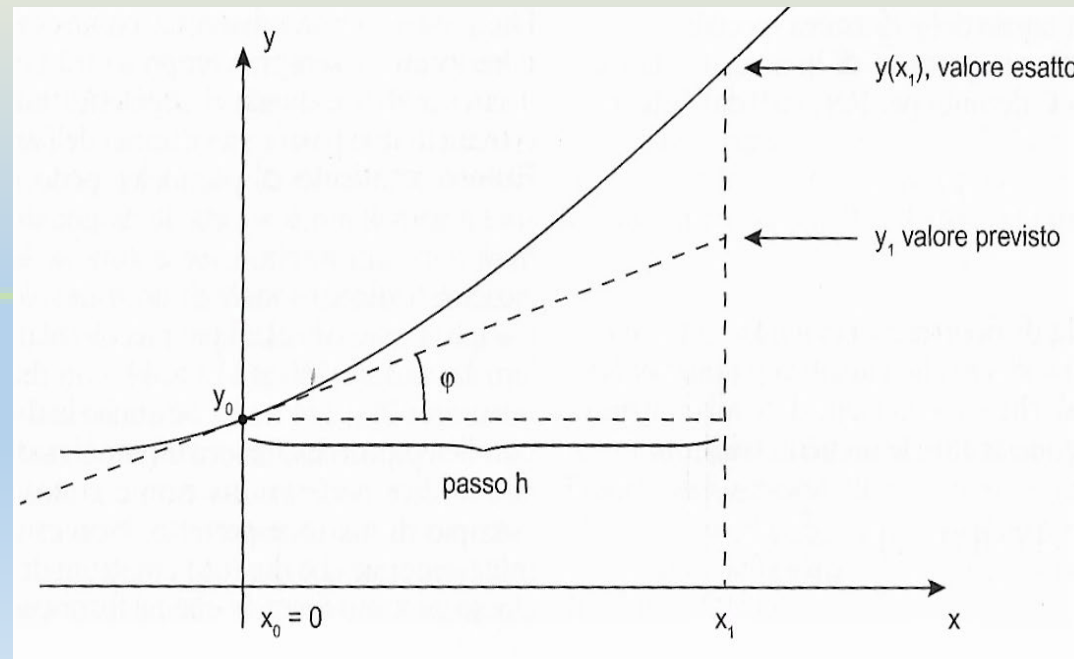
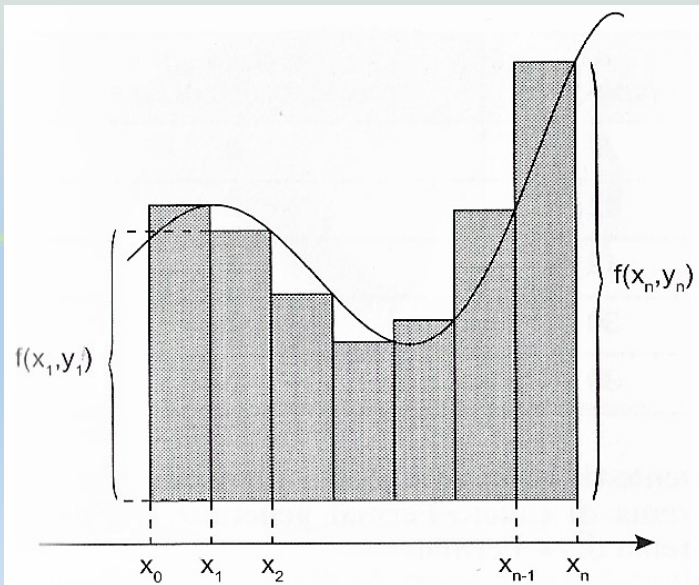


Ideazione del metacentro (1749)



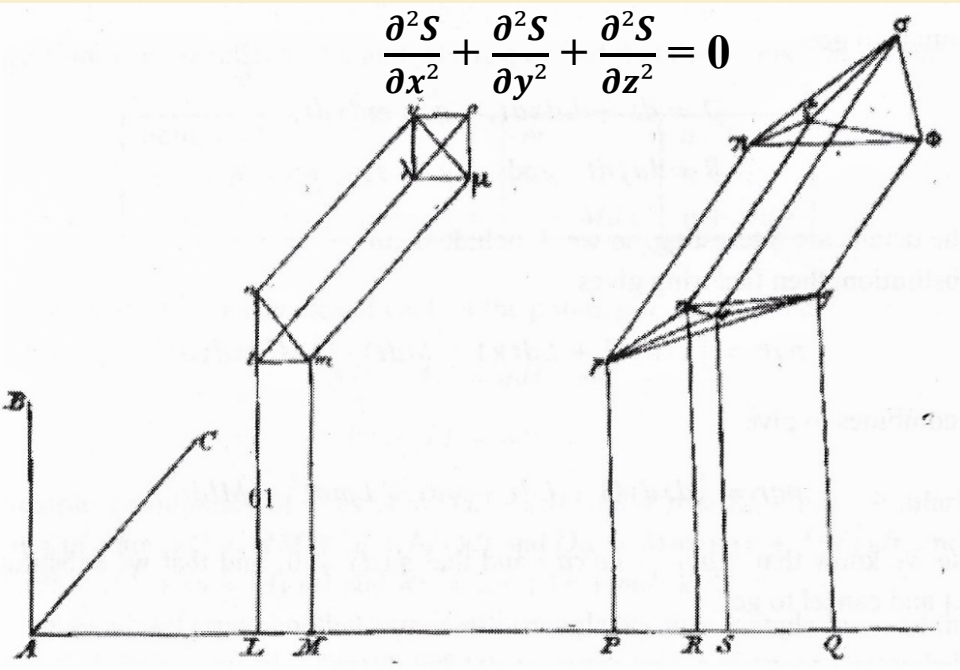
Soluzione numerica di equazioni differenziali ordinarie (1768-'70)

L'interpretazione teorica di un fenomeno fisico conduce quasi sempre a scrivere una o più *equazioni differenziali*, del tipo : $y' = \frac{dy}{dx} = f(x,y)$, secondo la notazione di *funzione* di Eulero . Partendo da una variazione infinitesimale di un fenomeno , possiamo provare a estenderla concettualmente ad un effetto macroscopico esteso a tutto un corpo, mediante l'operazione di *integrazione*, e vedere se ciò corrisponde alla nostra osservazione del fenomeno. Esiste una molteplicità di casi in non conosciamo un integrale generale di un'equazione differenziale rappresentativa di un fenomeno fisico e si deve ricorrere all'integrazione numerica, cioè si sostituiscono alle derivate approssimazioni numeriche di queste , utilizzando i valori della funzione in un numero finito di punti dell'intervallo di definizione .



immaginare il moto dei fluidi (1757-1761)

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = 0$$



equazione di continuità: quantità di moto lungo x: quantità di moto lungo y:

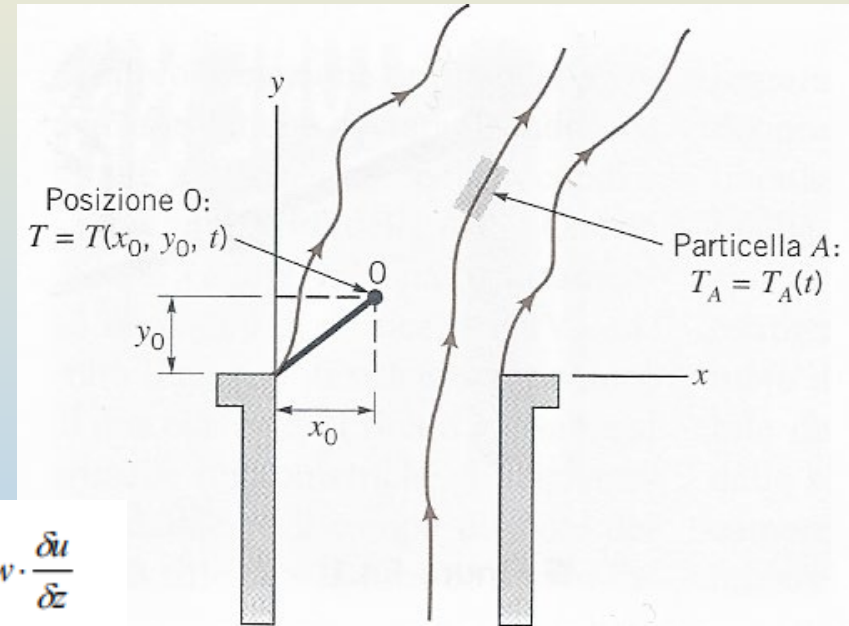
$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$



Bilancio massa e quantità di moto



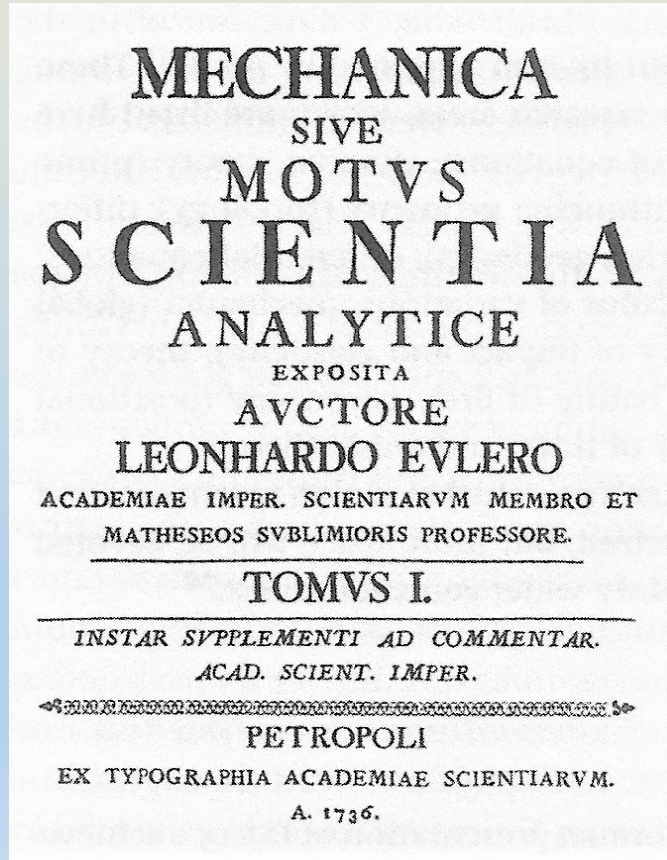
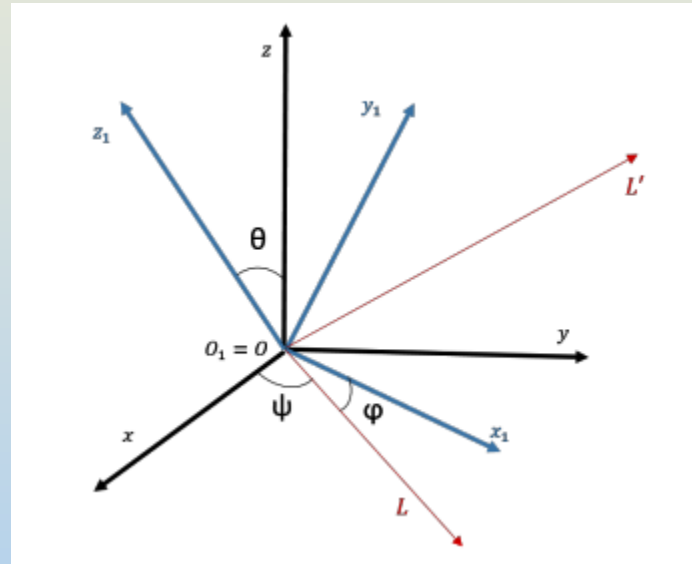
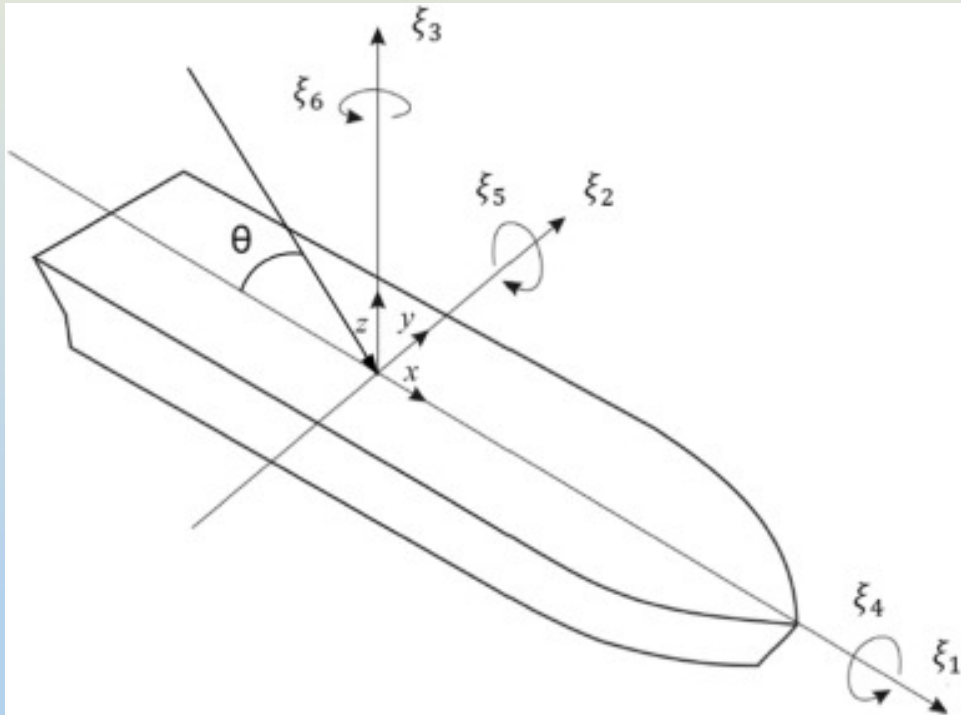
67. Commodissime igitur incipiemus ab ipsa quantitate integrali, cuius differentiale esse oportet formulam $u dx + v dy + w dz$ posito tempore constante. Sit ergo S hoc integrale, quod erit functio ipsarum x, y et z , tempore t in quantitatibus constantibus involuto; atque si haec quantitas S differentietur, coefficientes differentialium dx, dy et dz statim praebebunt celeritates u, v et w , quae quidem praesenti tempore conveniant puncto fluidi λ , cuius coordinatae sunt x, y et z . Quaestio autem huc redit: ut definiatur, quales functiones ipsarum x, y et z , pro S assumi debeant, ut etiam fiat $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$; sed cum sit $u = \frac{dS}{dx}$, $v = \frac{dS}{dy}$ et $w = \frac{dS}{dz}$, ut sit $\frac{d^2 S}{dx^2} + \frac{d^2 S}{dy^2} + \frac{d^2 S}{dz^2} = 0$.

$$P_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p_x}{\partial x} = \frac{\delta u}{\delta t} + u \cdot \frac{\delta u}{\delta x} + v \cdot \frac{\delta u}{\delta y} + w \cdot \frac{\delta u}{\delta z}$$

$$Q_y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p_y}{\partial y} = \frac{\delta v}{\delta t} + u \cdot \frac{\delta v}{\delta x} + v \cdot \frac{\delta v}{\delta y} + w \cdot \frac{\delta v}{\delta z}$$

$$R_z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p_z}{\partial z} = \frac{\delta w}{\delta t} + u \cdot \frac{\delta w}{\delta x} + v \cdot \frac{\delta w}{\delta y} + w \cdot \frac{\delta w}{\delta z}$$

Dinamica di un corpo rigido (1736)

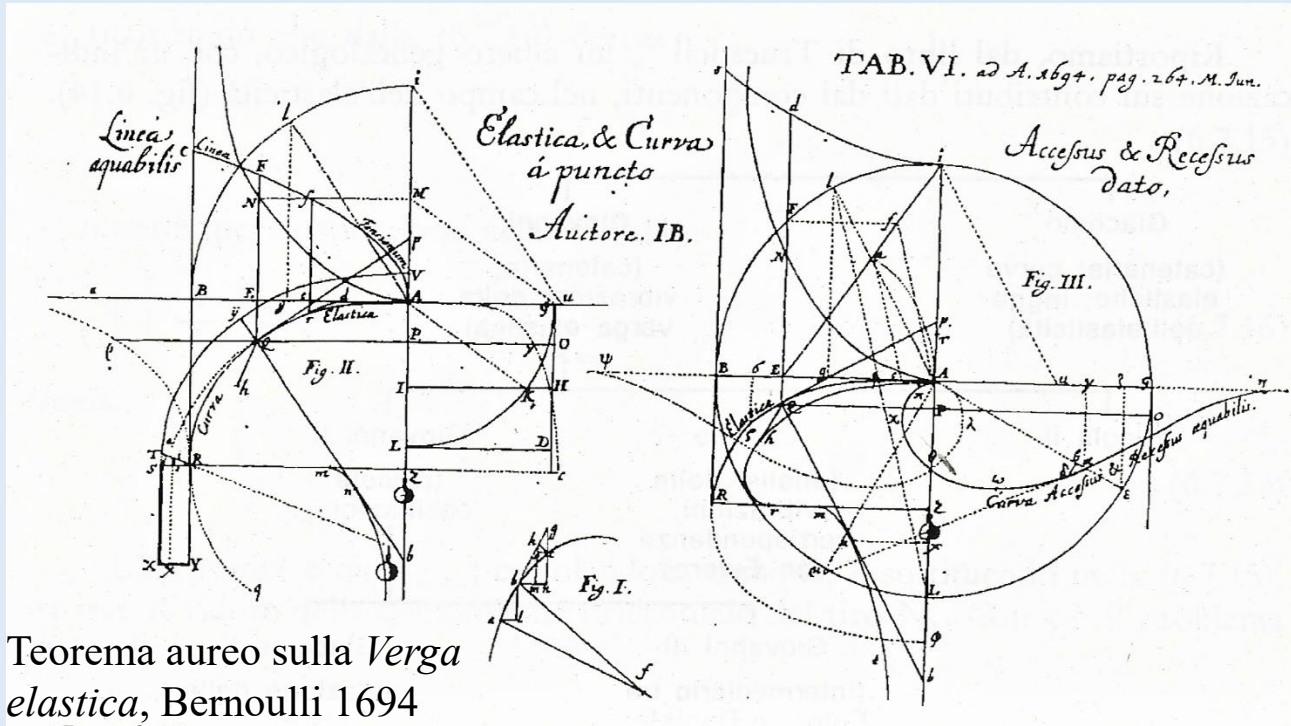


Soluzione problemi complessi nel '700

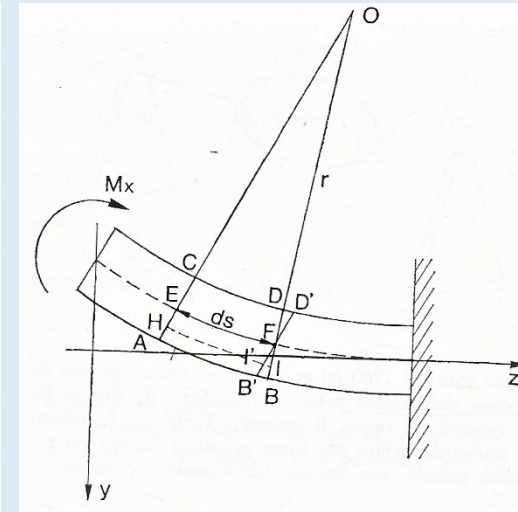
La soluzione di problemi complessi avveniva conoscendo gli stati iniziale e finale ; esempi applicati ai vascelli :

- equilibrio statico metacentrico (anche in prova di stabilità)**
- velocità iniziale palla di cannone**
- Energia delle onde sulle fiancate del vascello**
- Moto trocoidale delle onde marine**

Una riflessione di circa 40 anni : le equazioni indefinite di equilibrio della trave (1771)



Teorema aureo sulla Verga elastica, Bernoulli 1694

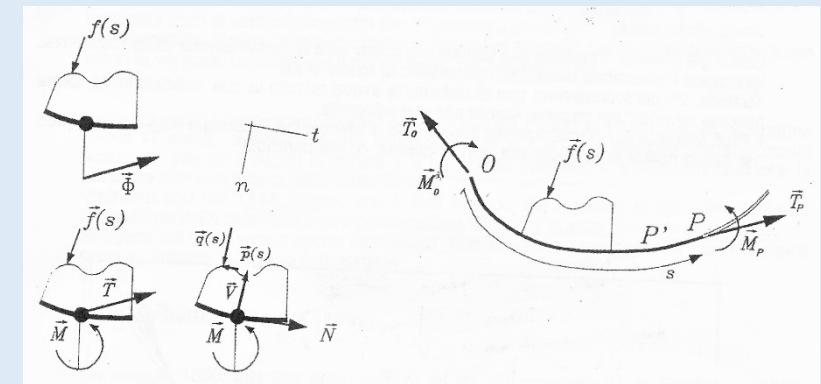


$$Mx = \frac{E \cdot I_x}{r} \quad (1727)$$

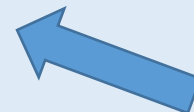
che lega la curvatura della linea d'asse di una trave elastica inizialmente rettilinea al momento flettente ; esiste cioè una costante di proporzionalità tra raggio di curvatura r e momento di inerzia I_x (*rigidezza flessionale*)

Dalla 2^a e 3^a : $\frac{d^2M}{dz^2} = -q \Rightarrow$ la derivata seconda del momento flettente uguaglia l'intensità del carico trasversale (mutata di segno)

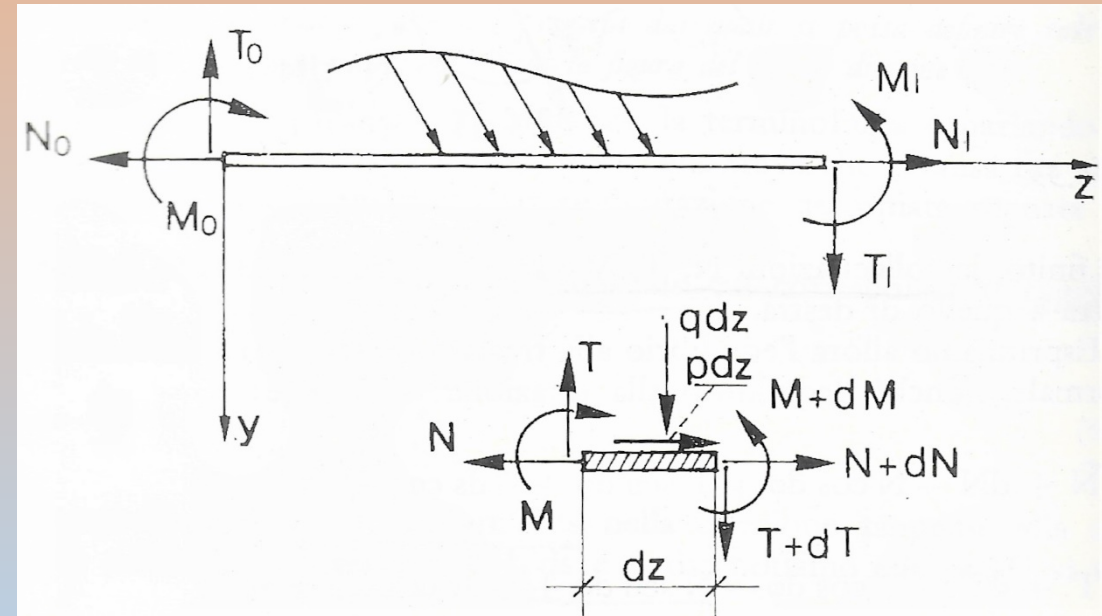
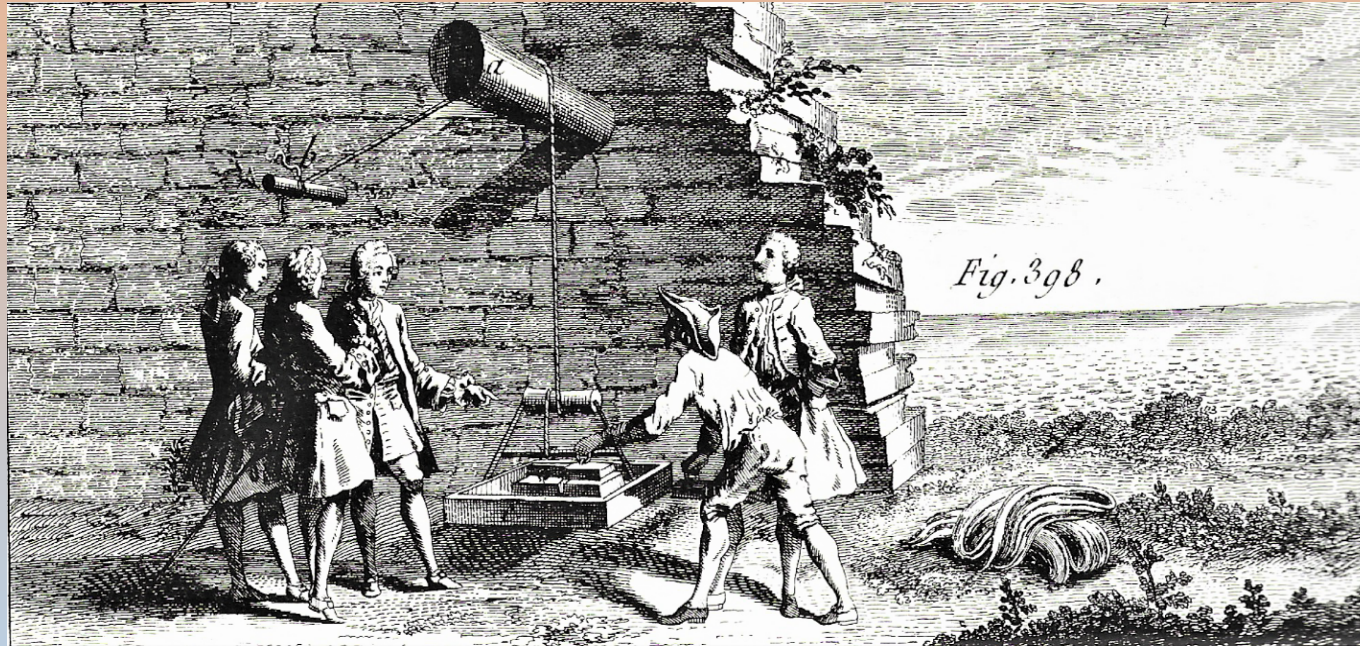
Dalla 3^a: $\frac{dM}{dz} = T \Rightarrow$ la derivata prima del momento flettente è uguale alla forza di taglio



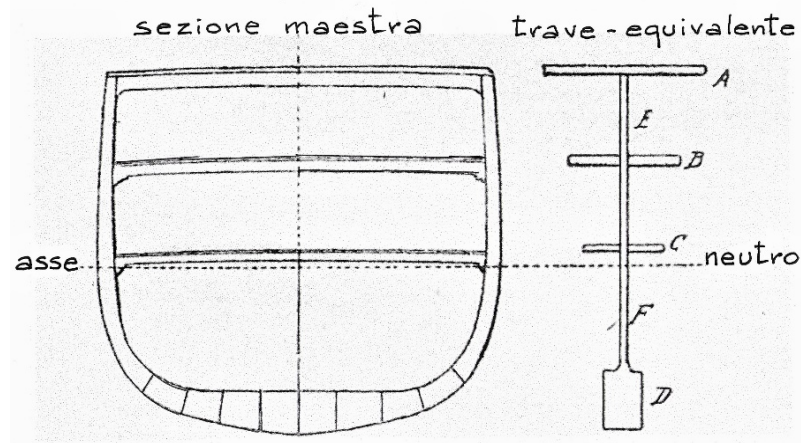
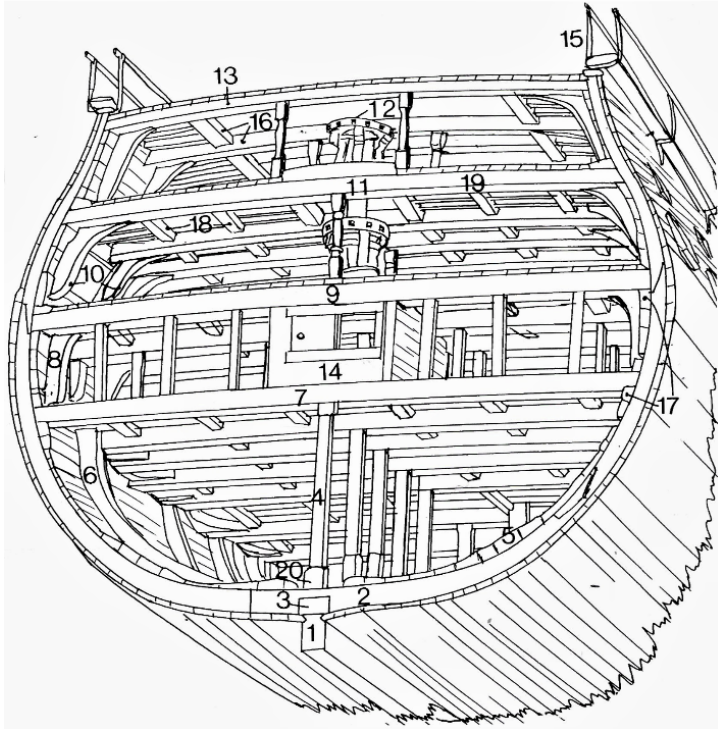
$$\frac{dN}{dx} + p = 0, \quad \frac{dV}{dz} + q = 0, \quad \frac{dM}{dz} + V = 0 \quad (1771)$$



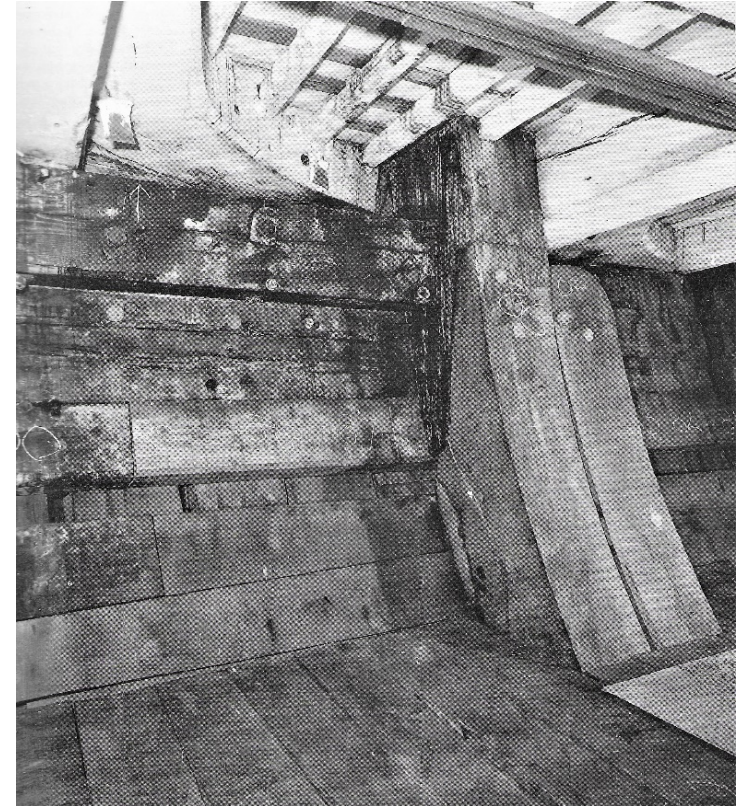
Equilibrio statico di una trave elastica (1771)



Equazioni di equilibrio : partendo dall'equilibrio locale in termini infinitesimali , ottiene con pochi passaggi l'equilibrio globale

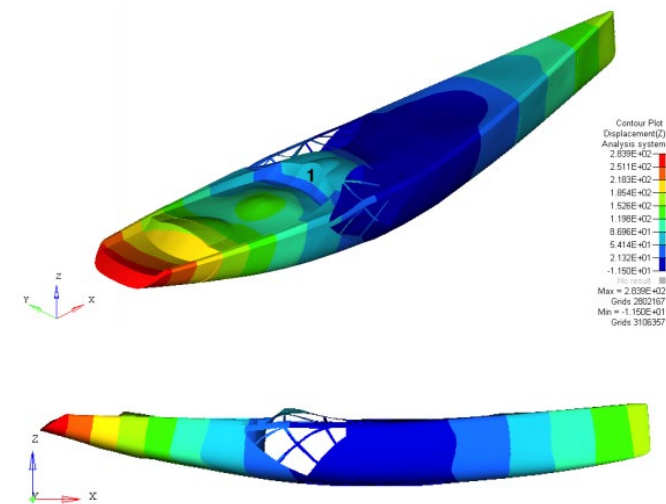
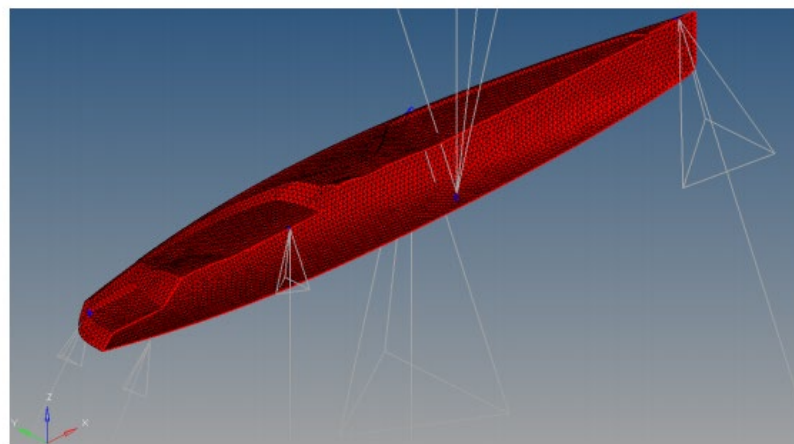
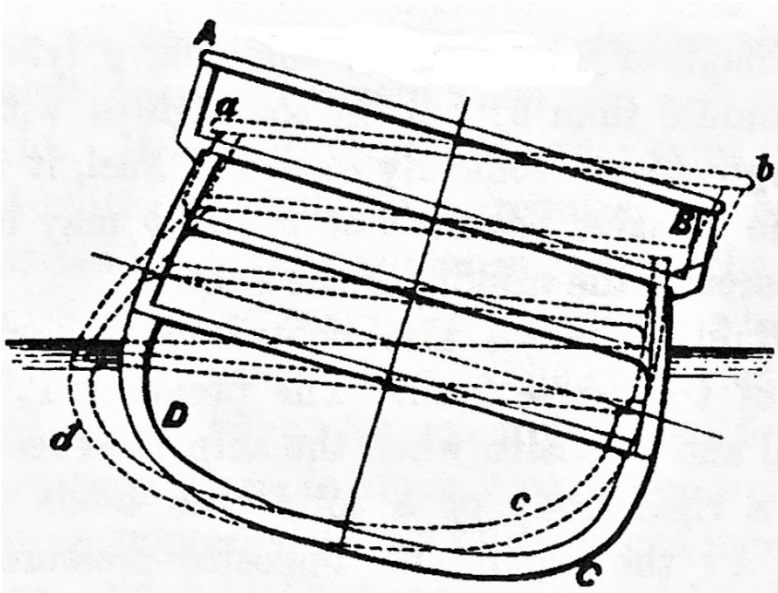


- A** aree dormienti, trincarini ,ponte coperta
- B** aree strutture , ponte corridoio
- C** aree ponte batteria
- D** aree fasciame est. e int. , chiglia , ossat. long.
- E-F** tutti i giunti verticali (*ligamenti*)



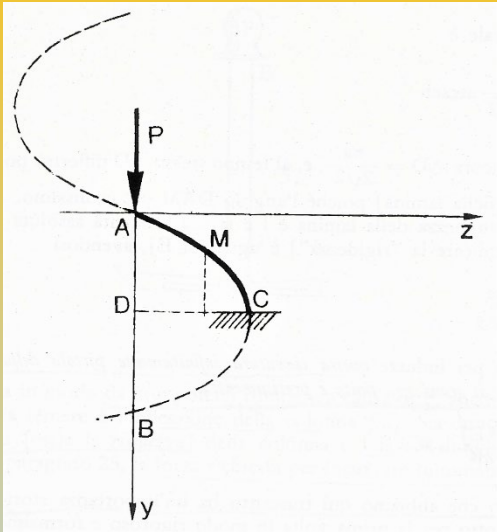
Il trave-nave

Una bella idea di lungo sviluppo

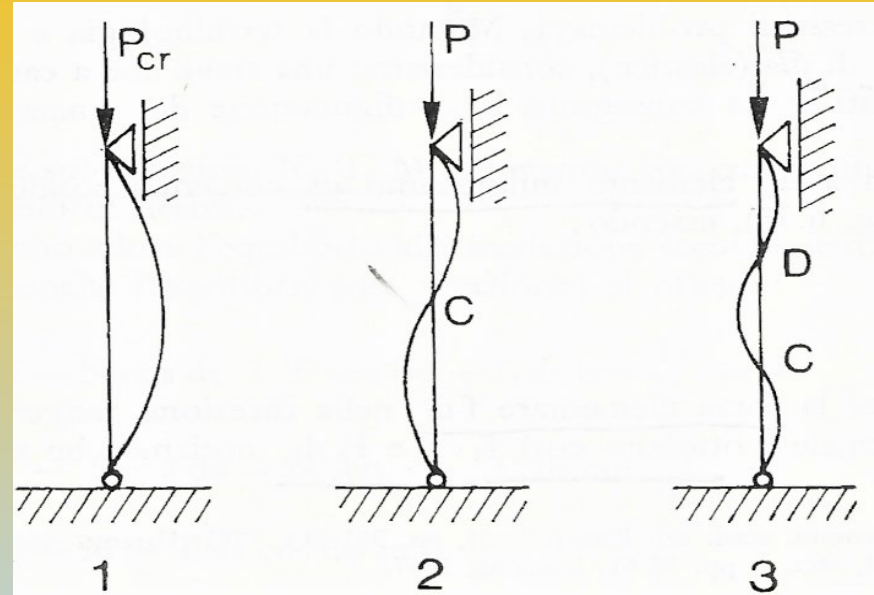
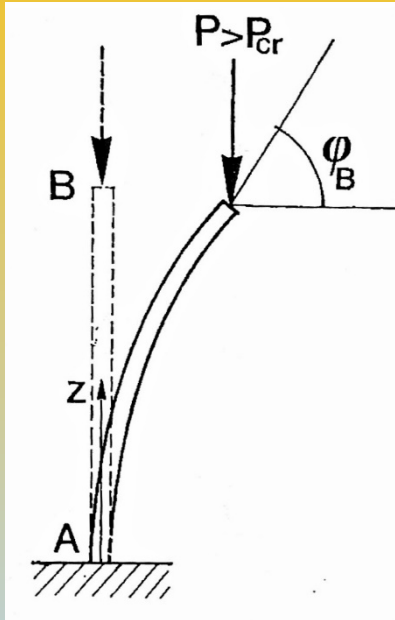


Il trave-nave , ieri e oggi

scoperta del *Carico critico di punta* (1759)

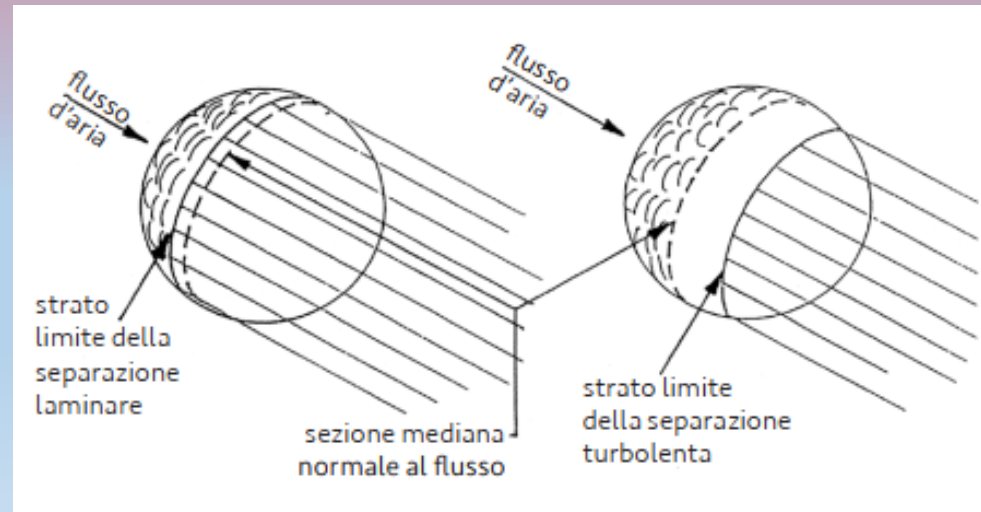
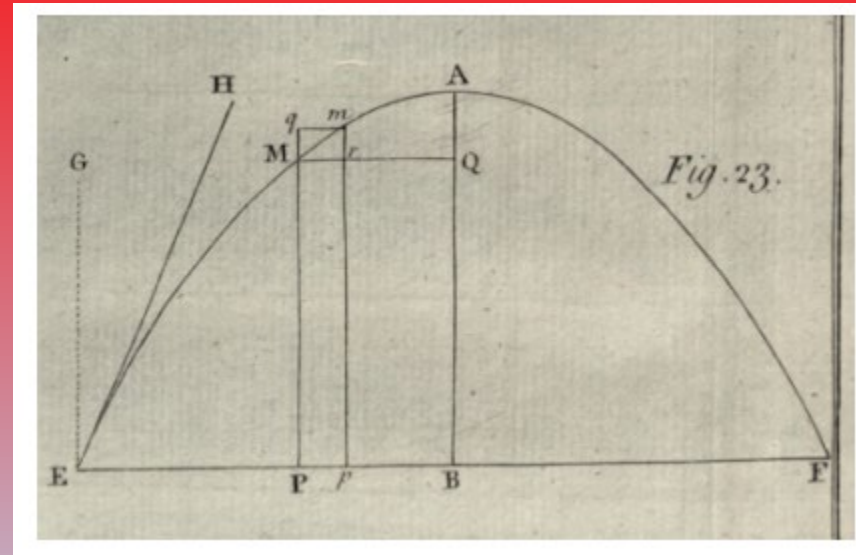
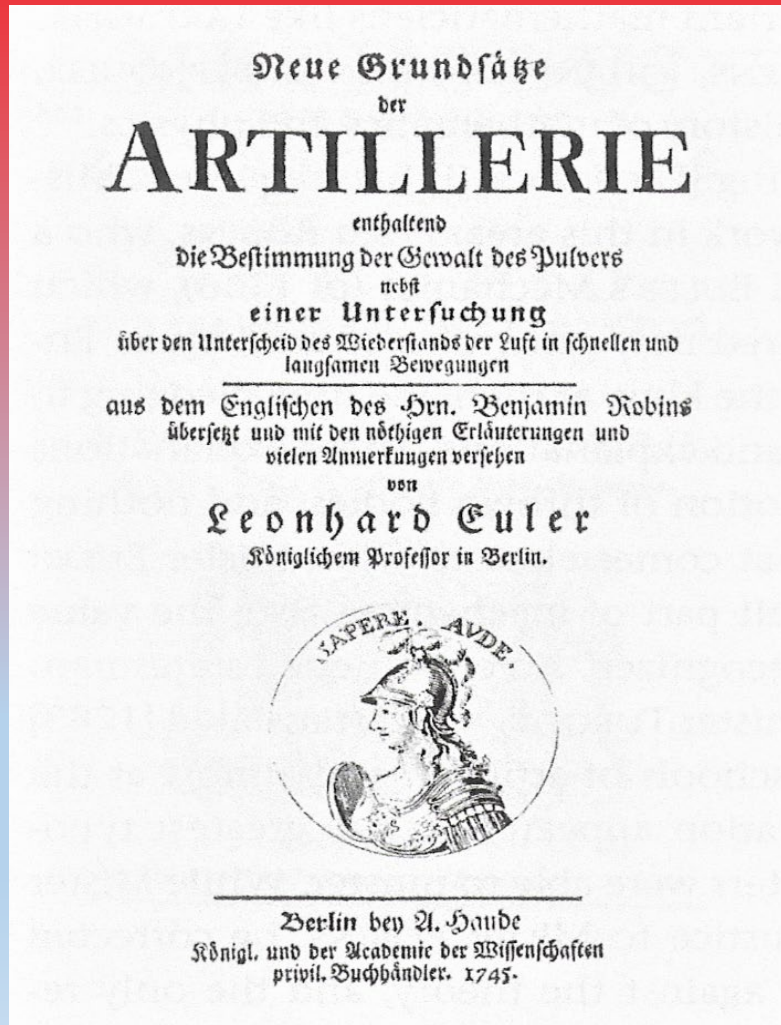


$$P = \frac{\pi^2 E I}{4 l^2}$$

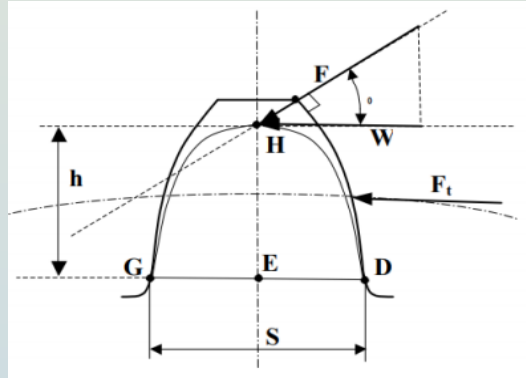
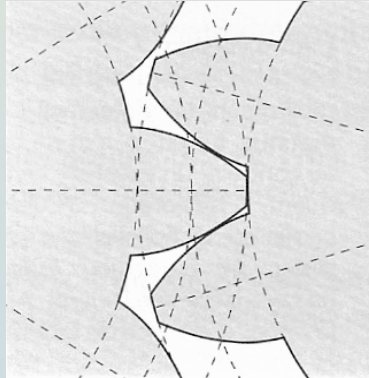


Per la prima volta si introduce compiutamente il concetto di *carico critico* (o di *trave caricata di punta*).

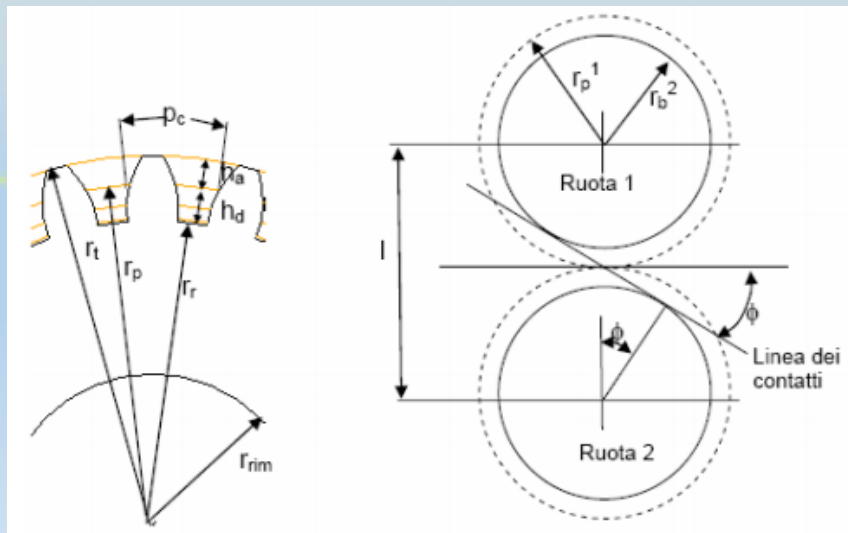
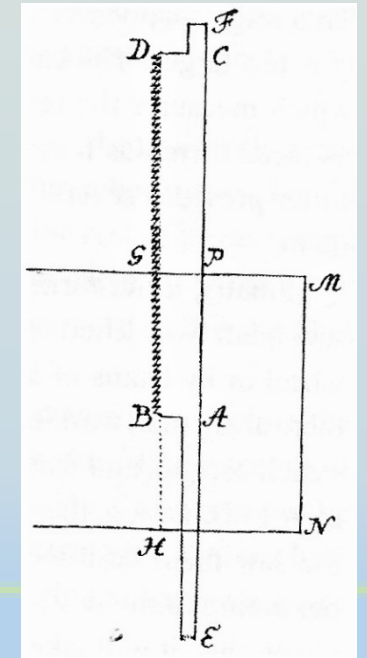
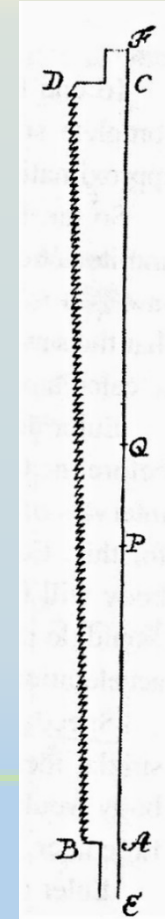
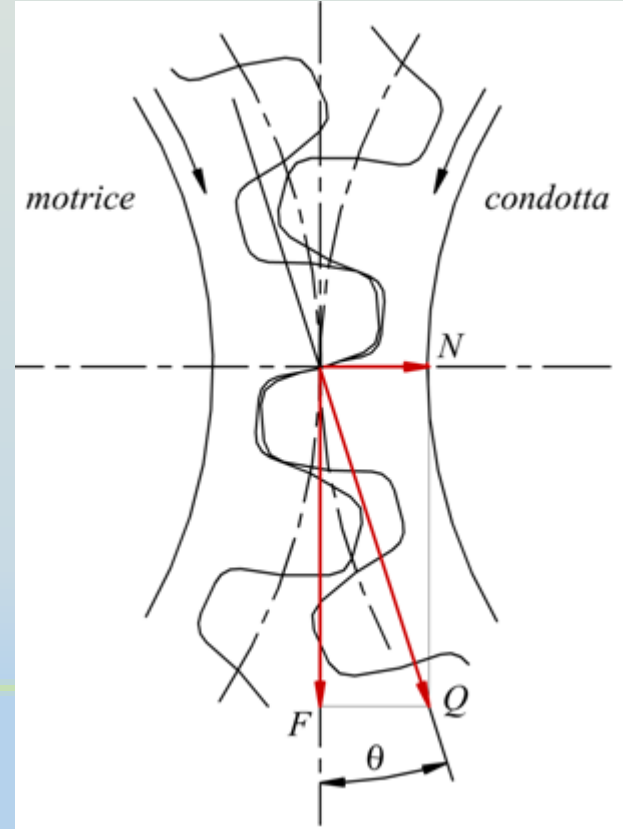
L'Artiglieria e la matematica del tiro balistico (1745)



macchinari per le navi (1754,1756)



ingranaggi rotativi



misure ideali di una sega verticale per legname navale

IL PROBLEMA ISOPERIMETRICO

IL PROBLEMA DI DIDONE

*GIUNSERO IN QUESTI LUOGHI, OV'OR VEDRAI
SORGER LA GRAN CITTADE E L'ALTA RÒCCA
DE LA NUOVA CARTAGO, CHE DAL FATTO
BIRSA NOMOSSI, PER L'ASTUTA MERCE
CHE, PER FONDARLA, FÈR DI TANTO SITO
QUANTO CERCHIAR DI BUE POTESSE UN TERGO.* (Eneide ,libro I)



- ...Re Iarba promise a Didone, regina di Tiro da cui fuggiva spodestata, che le avrebbe dato tanto terreno quanto poteva abbracciarne una pelle di toro. Didone non si scoraggiò ma tagliò la pelle in striscioline sottili e le unì in modo da formare una corda. Con essa recintò lo spazio nel quale sarebbe dovuta poi nascere **Cartagine**...Didone aveva a disposizione la spiaggia, cioè un segmento rettilineo, che poteva usare in modo da risparmiare la sua preziosa pelle di bue.
- Il problema, chiamato spesso *problema isoperimetrico*, si può riformulare chiedendo quale sia la figura geometrica che a parità di perimetro ha area maggiore. La soluzione è intuitivamente il cerchio. Per la dimostrazione di questo risultato si dovette attendere il 1838. Eulero lo affronta nel 1732, poi nel *Methodus Inveniendi* (1744)
- Principio di minima azione

Insieme a Lagrange per il *Calcolo delle variazioni* (1744)

Il *Calcolo delle variazioni* è quel campo dell'analisi matematica che vuole determinare curve, superfici, cammini etc. per i quali una determinata funzione possiede un valore stazionario, cioè in linea di principio massimi e minimi ; si tratta di massimi e minimi di funzioni variabili che si presentano sotto forma di integrali definiti o di soluzioni di equazioni differenziali o, più generalmente di speciali funzioni , c.d. *funzionali*, il cui dominio è un insieme di funzioni.

METHODUS INVENIENDI LINEAS CURVAS

Maximi Minimive proprietate gaudentes,
SIVE

SOLUTIO

PROBLEMATIS ISOPERIMETRICI
LATISSIMO SENSU ACCEPTI

AUCTORE

LEONHARDO EULERO,

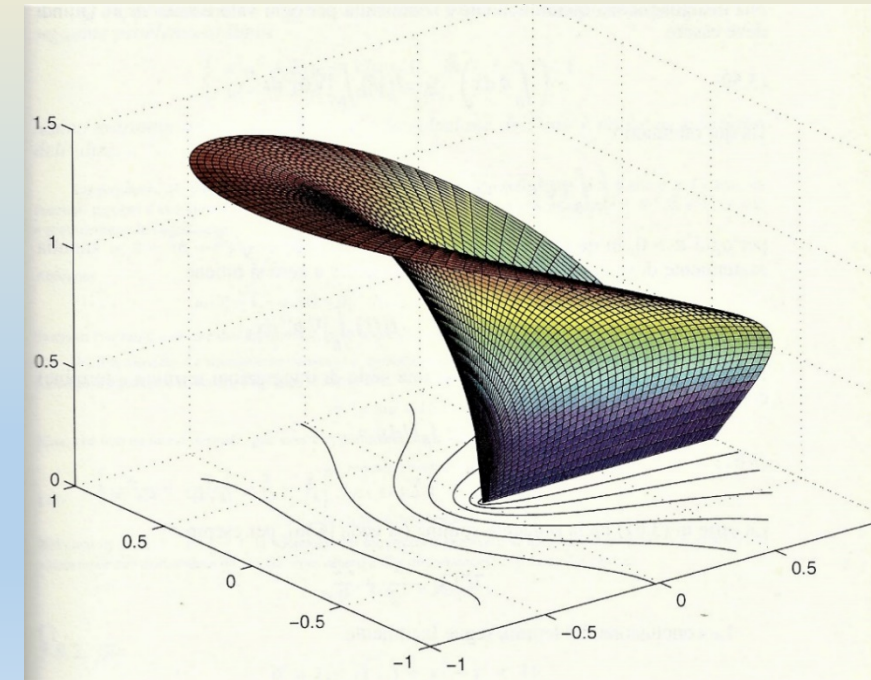
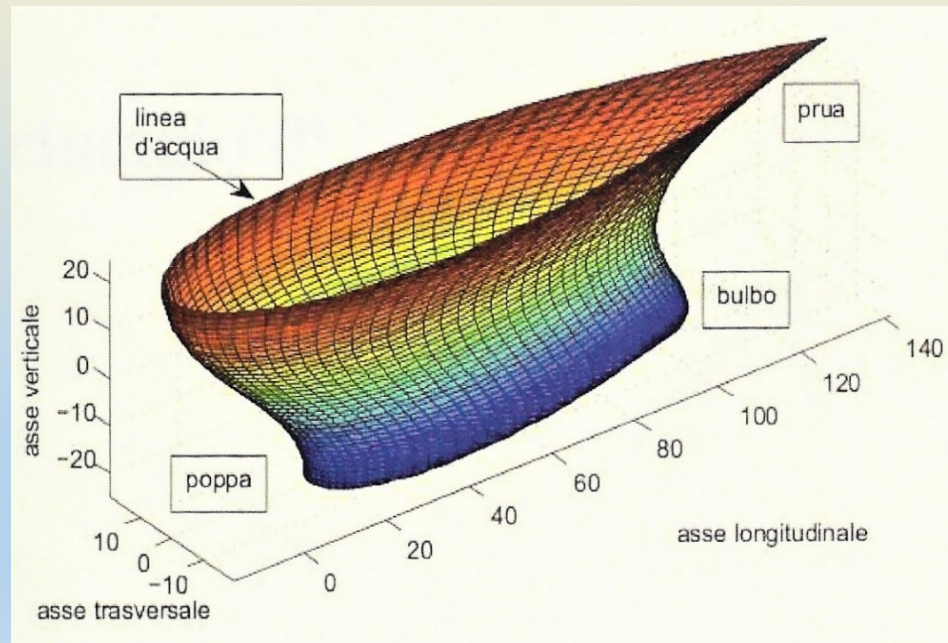
Professore Regio, & Academia Imperialis Scientiarum
PETROPOLITANÆ Socio.



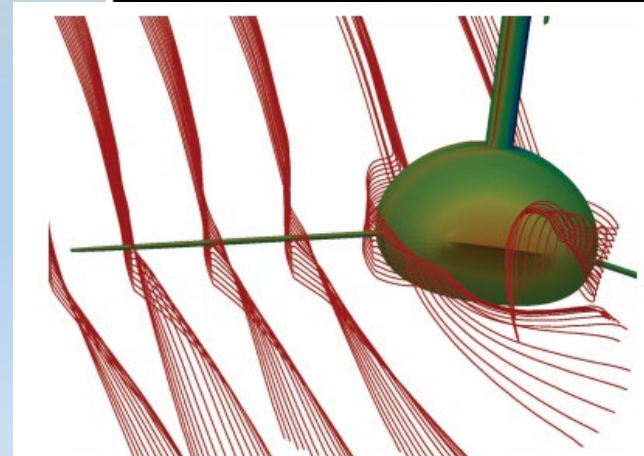
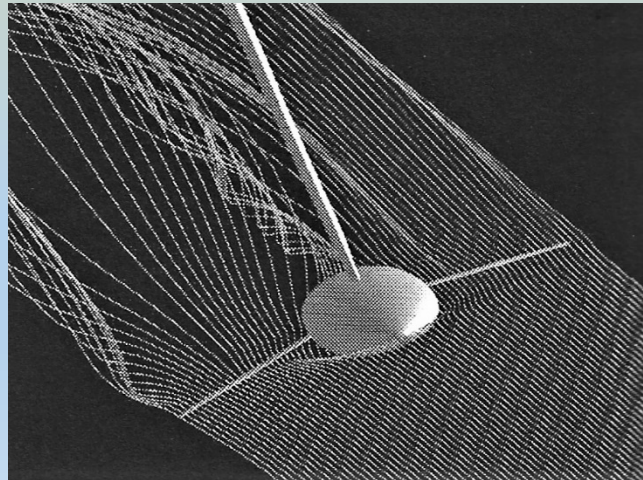
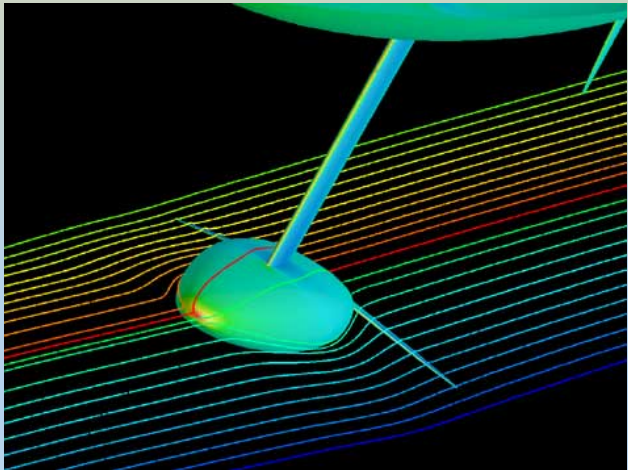
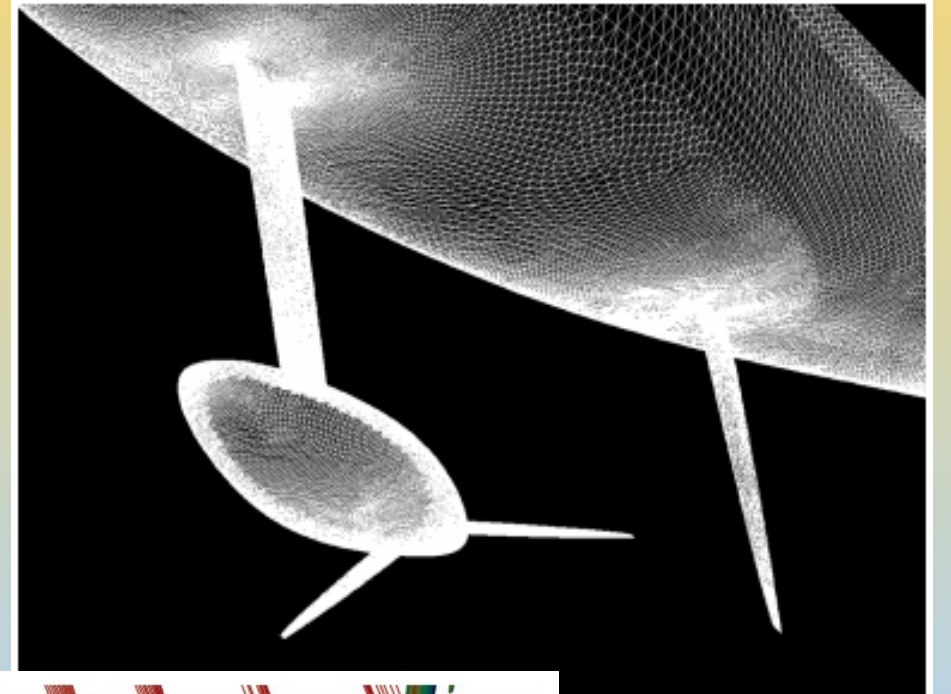
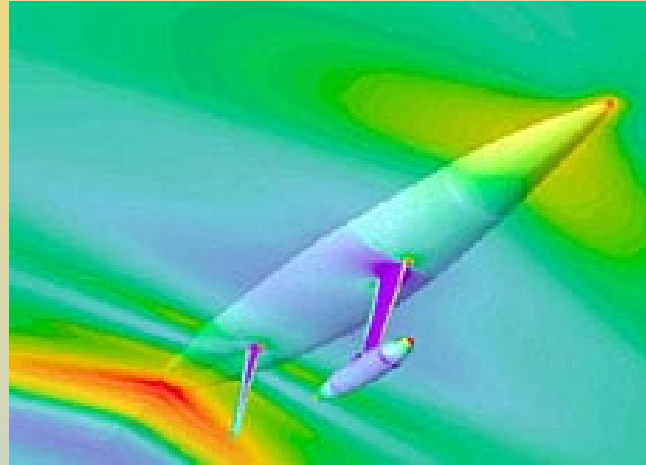
LAUSANNE & GENEVE,

Apud MARCUM-MICHAËLEM BOUSQUET & Socios.

MDCCLIV.



Eulero alla Coppa America



Equazioni da 1 milione di dollari !

- *Equazioni (alle derivate parziali) di Navier–Stokes, uno dei 7 problemi irrisolti del Millennium.*

$$\begin{cases} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{b} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \end{cases}$$

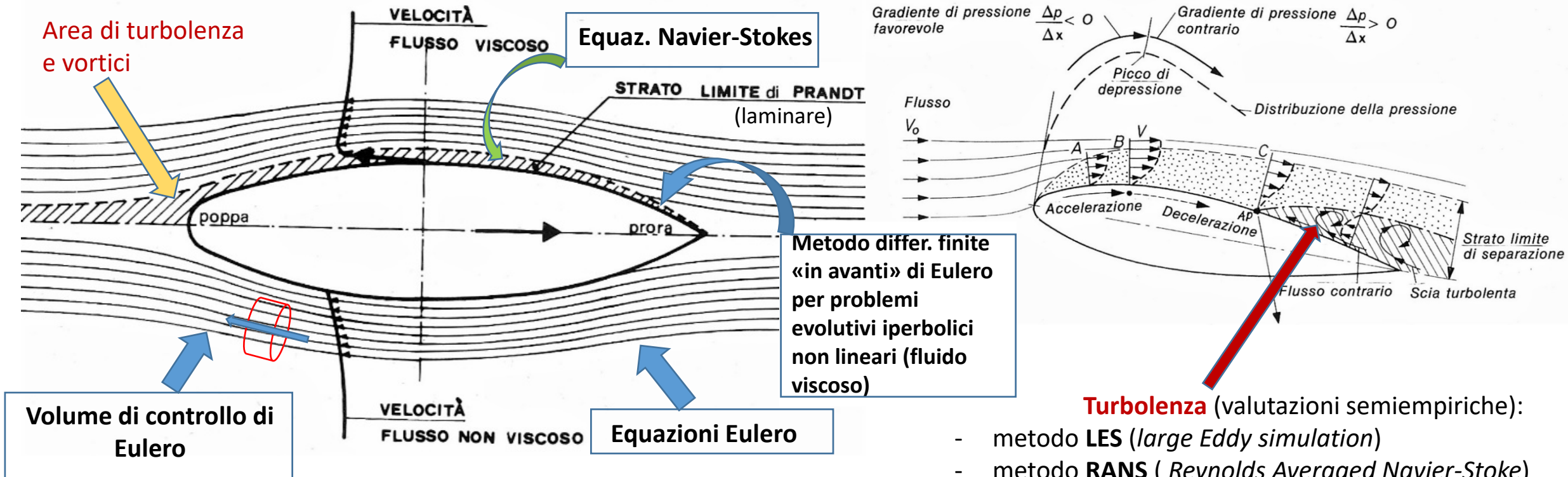


The diagram shows the Navier-Stokes equation with labels for its components:

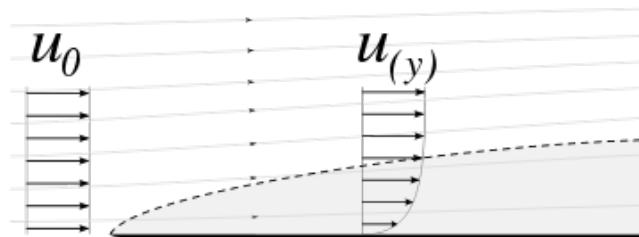
- ρ : densità (grandezza scalare)
- $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$: derivata rispetto al tempo
- $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$: prodotto vettoriale
- ∇ : gradiente
- p : pressione (grandezza scalare)
- $\nabla \cdot \mathbf{T}$: divergenza
- \mathbf{T} : tensione (grandezza vettoriale)
- \mathbf{f} : forze interne del corpo (grandezze vettoriali)

- Semplificazione grazie a **Eulero** : Le equazioni di Navier-Stokes nella forma semplificata per flussi non viscosi vengono dette equazioni di Eulero. Un altro modello spesso usato (ad esempio nella CFD) prevede di utilizzare le equazioni di **Eulero** in zone del campo lontane dai corpi solidi, e la teoria dello strato limite in prossimità di questi. Le equazioni di **Eulero**, integrate lungo una linea di flusso diventano l'equazione di Bernoulli.

... Eulero è ancora a bordo !



strati limite: regioni di frontiera con forti gradienti.



- forze tangenziali viscosi
- pressione normale per equilibrio forze prora(>)-poppa(<)

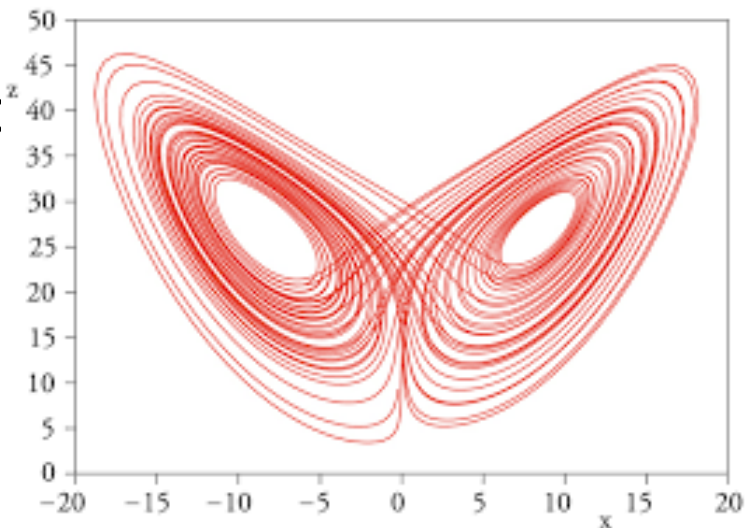
.....oltre *Eulero* e *Navier - Stoke*

- valutazione **statistica** della turbolenza (Kolmogorov, 1941) ↩
- «**Cascata di energia**» per la dissipazione viscosa (Richardson, 1992), spettro di energia dei vortici nei flussi turbolenti
- **Studio della turbolenza idrodinamica con la *Teoria del caos*** (Takens, Ruelle, 1971-1981):
 - Sensibilità molto elevata alle condizioni iniziali e di contorno
 - oltre fasi di breve predicibilità (n° di Reynolds basso):

Sistemi complessi ↩

Spazio delle fasi ↩

Attrattori , dimensione frattale



«Leggete Eulero; egli è il maestro di tutti noi»

Pierre-Simon Laplace (1749-1827)

